1. maturitní otázka: Výroky a množiny

Výrok: věta, o které má smysl prohlásit, že je pravdivá

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ výroková forma

$\forall a,b \in R: (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ výrok (musí být kvantifikátor)

negace ... výrok s opačnou pravdivostní hodnotou

~~obrácení ... $A \Rightarrow B$ $\rightarrow$ $B \Rightarrow A$~~

		KONJUNKCE	DISJUNKCE (stačí, aby byl pravdivý jen jeden)	IMPLIKACE	EKVIVALENCE
A	B	$A \land B$	$A \lor B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

VÝROK	NEGACE
$A \land B$	$A' \lor B'$
$A \lor B$	$A' \land B'$
$A \Rightarrow B$	$A \land B'$
$A \Leftrightarrow B$	$[(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)]' = (A \Rightarrow B)' \lor (B \Rightarrow A)' =$
	$= (A \land B') \lor (B \land A')$

$A \Rightarrow B$ implikace (2 nezávislé výroky)

$B \Rightarrow A$ obrácení

$B' \Rightarrow A'$ obměna (stejná pravdivostní hodnota jako $A \Rightarrow B$

$A \wedge B'$ negace

Tautologie – složený výrok, který je vždy pravdivý (bez ohledu na pravdivost částí)

$$(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$$

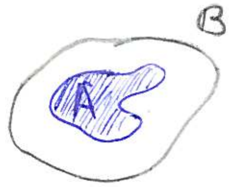
$A \wedge B$	$A \vee B$	$\Rightarrow$
1	1	1
0	1	1
0	1	1
0	0	1

Množiny

– „množina" není nadefinována

podmnožina

$$A \subset B \iff \forall x \in A;\ x \in B$$



inkluze

průnik

$$A \cap B = \{\forall x;\ x \in A \wedge x \in B\}$$

sjednocení

$$A \cup B = \{\forall x;\ x \in A \vee x \in B\}$$

rozdíl

$$A - B = \{\forall x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$$

doplněk

$A'_B = B - A = \{\forall x; x \in B \wedge x \in A\}$

n.

$\langle 0;10 \rangle'_R = (-\infty;0) \cup (10;+\infty)$

kartézský součin

$A \times B = \{\forall [x;y]; x \in A \wedge y \in B\}$

N... přirozená čísla $(0 \notin N)$ $\qquad N = \{1,2,3,4,\dots \infty\}$

Z... celá čísla $\qquad Z = \{0;1;-1;2;-2;\dots\}$

Q... racionální čísla (s ukončeným či periodickým rozvojem) $\qquad Q = \{\forall \frac{p}{q}; p \in Z \wedge q \in N\}$

$a = 3,\overline{85}$

$$100a = 385,\overline{85}$$
$$a = 3,\overline{85}$$
$$99a = 382$$
$$a = \frac{382}{99}$$

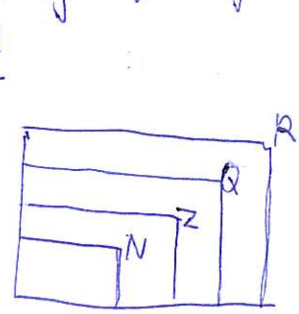
$b = 1,0\overline{26}$

$$1000a = 1026,\overline{26}$$
$$10a = 10,\overline{26}$$
$$990a = 1016$$
$$a = \frac{1016}{990}$$

$\overline{Q}$... iracionální čísla: čísla s neukončeným neperiodickým rozvojem

$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \frac{\sqrt{7}}{2}$

R... reálná čísla $\qquad R = Q \cup \overline{Q}$



Axiomy matematických operací

$M = Q \vee R$

UZAVŘENOST
(U)

$\forall a,b \in M;\ a+b \in M$ $\qquad$ $\forall a,b \in M;\ a \cdot b \in M$

ASOCIATIVNÍ ZÁKON
(A)

$\forall a,b,c \in M;\ (a+b)+c = a+(b+c)$ $\qquad$ $\forall a,b,c \in M;\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

KOMUTATIVNÍ ZÁKON
(K)

$\forall a,b \in M;\ a+b = b+a$ $\qquad$ $\forall a,b \in M;\ a \cdot b = b \cdot a$

EXISTENCE NEUTRÁLNÍHO PRVKU
(N)

$\exists x \in M;\ \forall a \in M;\ x+a = a$ $\qquad$ $\exists y \in M;\ \forall a \in M;\ y \cdot a = a$

$(x=0)$ $\qquad$ $(y=1)$

EXISTENCE INVERZNÍCH PRVKŮ
(I)

$x=0$ $\qquad$ $x=0 \quad y=1$

$\forall a \in M;\ \exists b \in M;\ a+b = x$ $\qquad$ $\forall a \in M-\{x\};\ \exists b \in M;\ a \cdot b = y$

DISTRIBUTIVNÍ ZÁKON

$\forall a,b,c \in M;\ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

DŮKAZ IRACIONALITY ČÍSLA $\sqrt{2}$

$\forall n \in N;\ n^2$ je sudé $\Rightarrow n$ je sudé

- důkaz sporem:

racionální číslo se dá napsat jako podíl ~~celých čísel~~

$a \in Z,\ b \in N$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

z toho plyne že a^2 je sudé
a z toho plyne že i a je sudé

$a^2 = 2 \cdot b^2$ $\qquad a$ je sudé $\qquad a = 2k$

$$(2k)^2 = 2b^2$$

$$4k^2 = 2b^2$$

to samé jako u a

$$2k^2 = b^2$$

b je sudé

a a b jsou sudá čísla a zlomek nebyl by tj. nesoudělný $\longrightarrow$ $\sqrt{2}$ není podíl ~~dvou~~ celého a přirozeného čísla, tedy není racionální.