Kvadratické funkce, rovnice a nerovnice

5

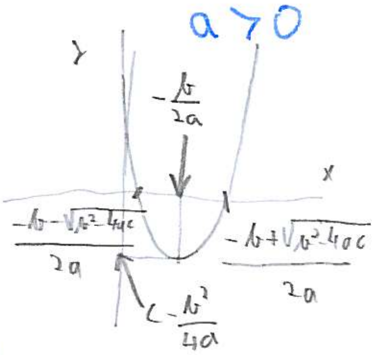
1) funkce

- $y = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$
- $D \in \mathbb{R}$
- grafem je parabola
- průsečíky s osou x: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$b^2 - 4ac = D$$

- vrchol: $V = \left[-\dfrac{b}{2a} ; c - \dfrac{b^2}{4a}\right]$
- vlastnosti:

$a > 0$



H: $\left\langle c - \dfrac{b^2}{4a} ; +\infty \right)$

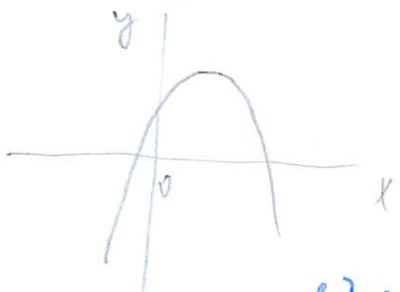
rostoucí pro $x \in \left\langle -\dfrac{b}{2a} ; +\infty \right)$

klesající pro $x \in \left(-\infty ; -\dfrac{b}{2a} \right\rangle$

zdola omezená, není shora

v bodě $x = -\dfrac{b}{2a}$ ostré minimum

$a < 0$



H: $\left(-\infty ; c - \dfrac{b^2}{4a} \right\rangle$

rostoucí pro $x \left(-\infty ; -\dfrac{b}{2a} \right\rangle$

klesající pro $x \left\langle -\dfrac{b}{2a} ; +\infty \right)$

zdola není, shora omezená

v bodě $x = -\dfrac{b}{2a}$ ostré maximum

$a = 1 \Rightarrow$ normovaná kvadratická funkce

2) Rovnice

Ve tvaru $ax^2+bx+c=0$ $\quad a,b,c \in R \wedge a \neq 0$

algebraická rovnice 2. stupně

ax^2 ... kvadratický člen

bx ... lineární člen

c ... absolutní člen

$x^2-5x+6=0$

SOUČET SOUČIN

$(x-3)(x-2)=0$

$x_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$b=0$ ... $ax^2+c=0$ (ryze kvadratická rovnice)

$c=0$ ... $ax^2+bx=0$

- řešení:

D (diskriminant) $= b^2-4ac$

$D>0$	$D<0$	$D=0$
$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	$x \in \emptyset$	$x=-\dfrac{b}{2a}$

Důkaz:

chceme to získat ve tvaru $(a+b)^2$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}-\frac{b}{2a}$$

$$x=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3) nerovnice

$ax^2+bx+c>0$

$ax^2+bx+c<0$

$ax^2+bx+c\geq 0$

$ax^2+bx+c\leq 0$

$a,b,c\in R$

$a\neq 0$

řešení:

1) najít kořeny odpovídající kvadratické rovnice
2) lze usoudit z grafu funkce

Příklad: Pro jaké m má dva různé reálné kořeny

$2x^2+(m+1)\cdot x+6=0$

$D>0$

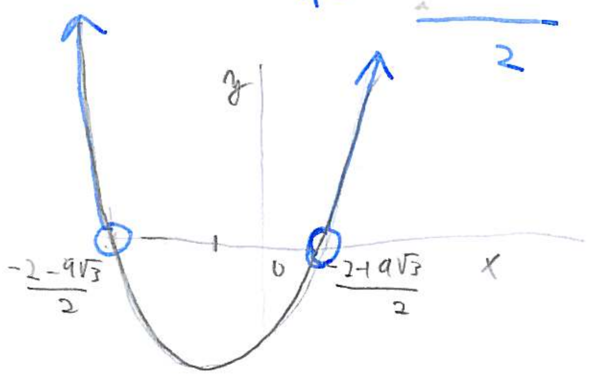
$(m+1)^2-4\cdot 2\cdot 6>0$

$m^2+2m+1-48>0$

$m^2+2m-47>0$

$m_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-4\cdot-47}$

$m_{1,2}=\dfrac{-2\pm 9\sqrt{3}}{2}$



$m\in\left(-\infty;\frac{-2-9\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-2+9\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$