21) Pravděpodobnost

- Náhodný pokus – akce, jejíž výsledek závisí na náhodě

  ω_i … výsledek náhodného pokusu

  Ω … množina všech výsledků náhodného pokusu

  $p(\omega_i)$ … pravděpodobnost výsledku

- Jev – podmnožina množiny všech možných výsledků Ω

- Pravděpodobnost jevu – součet pravděpodobností výsledků, které tvoří jev

- Doplněk:

$$P(X') = 1 - P(X)$$

nepodaří se sázka … podaří se sázka

- Sjednocení:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$ – A a B se vylučují, $A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$ – v obecném případě

- Průnik:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$ – pro nezávislé jevy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$ – obecně

- Opakované pokusy:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n … počet pokusů

k … počet příznivých výsledků

p … pravděpodobnost příznivého jevu

q … pravděpodobnost nepříznivého jevu

Podmíněná pravděpodobnost („jev A za podmínky B")

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pravděpodobnost

Náhodný pokus - akce, jejíž výsledek závisí na náhodě (hod kostkou, hod mincí, výběr karty z balíčku, výběr studenta ke zkoušení, účinek léku na pacienta apod.)

Značení: ω_i - výsledek náhodného pokusu
Ω - množina všech výsledků náhodného pokusu

$P(\omega)$ ... pravděpodobnost jednoho výsledku

Příklad: hod kostkou:
ω_1 - padlo 1 ω_2 - padlo 2 ω_3 - padlo 3 ω_4 - padlo 4 ω_5 - padlo 5 ω_6 - padlo 6
$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \}$

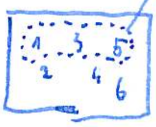
$p(\omega_1)$ - pravděpodobnost výsledku – je to číslo z intervalu <0;1>, které popisuje, jak často dojde k tomuto výsledku.

Je-li každý z m výsledků stejně pravděpodobný je pravděpodobnost každého z nich rovna $p(\omega_i) = 1/m$.
Hod kostkou: 6 výsledků, pravděpodobnost každého je $p(\omega_i) = 1/6$
Hod mincí: 2 výsledky, pravděpodobnost obou je $p(\omega_i) = 1/2$

$\omega_1 \quad \omega_2 \dots \omega_m$
$P(\omega_{1,2\dots m}) = \frac{1}{m}$

Pokud není každý výsledek stejně pravděpodobný musíme jeho pravděpodobnost určit statisticky tj. sledováním výsledků při velkém množství pokusů.
Falešná kostka: například zatížena strana 1 (proti 6). Zjistíme třeba $p(\omega_1) = 1/12$, $p(\omega_2) = p(\omega_3) = p(\omega_4) = p(\omega_5) = 1/6$, $p(\omega_6) = 1/4$.
Pravděpodobnost narození chlapce p(ch)=0,515 , pravděpodobnost narození dívky p(d)=0,485 .

jev A



Jev - podmnožina množiny všech možných výsledků Ω. (příklady z házení kostkou)

padne liché číslo	$A = \{ \omega_1, \omega_3, \omega_5 \}$ jev A -> padne 1, 2 nebo 3
padne číslo menší než 3	$B = \{ \omega_1, \omega_2 \}$
padne číslo 5	$C = \{ \omega_5 \}$
padne číslo větší než nula	$D = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \} = \Omega$
padne číslo větší než šest	$E = \{ \} = \emptyset$

Pravděpodobnost jevu P(X) je definována jako součet pravděpodobností výsledků, které tvoří daný jev. $P(X) = \sum_{\omega \in X} p(\omega)$

! Pravděpodobnost nějakých ~~...~~ výsledků je součet jejich pravděpodobností. !

$P(A) = p(\omega_1) + p(\omega_3) + p(\omega_5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$
$P(B) = p(\omega_1) + p(\omega_2) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$
$P(C) = p(\omega_5) = 1/6$
$P(D) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 6/6 = 1$ jistý jev $P(\Omega)=1$
$P(E) = 0$ nemožný jev $P(\emptyset)=0$

V případě, že všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné můžeme pravděpodobnost vypočítat jako:

$$\boxed{\frac{\text{počet výsledků příznivých jevu A (patřících do množiny A)}}{\text{počet všech možných výsledků}}}$$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

Pokud budeme házet „naší“ falešnou kostkou mohou vyjít jiné pravděpodobnosti
$P(A) = p(\omega_1) + p(\omega_3) + p(\omega_5) = 1/12 + 1/6 + 1/6 = 5/12 \neq 1/2$
$P(B) = p(\omega_1) + p(\omega_2) = 1/12 + 1/6 = 3/12 = 1/4 \neq 1/3$
$P(C) = p(\omega_5) = 1/6$
$P(D) = 1/12 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/4 = 12/12 = 1$
$P(E) = 0$

(pravděpodobnost toho, že padne liché číslo je $\frac{5}{12}$)

V našem příkladu:
$P(A) = 3/6 = 1/2$
$P(B) = 2/6 = 1/3$
$P(C) = 1/6$
$P(D) = 6/6 = 1$
$P(E) = 0/6 = 0$

Př.1: V bedně je 30 výrobků, z nichž 3 jsou vadné. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vytažený výrobek je a)vadný [3/30=0,1] b)bezvadný [27/30=0,9].

Pravděpodobnost jednoho: $\frac{1}{30}$ 1 z 3 připravím a to je jev A, pravděpodobnost jevu A z těch 3. $\frac{1}{30} = \frac{3}{30} = 0{,}1 = 10\%$

Př. 2a: Jaká je pravděpodobnost, že mezi 5 náhodně vybranými výrobky z příkladu 1 bude právě 1 vadný?

Vyberu 5 → kombinační číslo

$$P = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{27}{4}}{\binom{30}{5}} = 0{,}369$$

$\binom{3}{1}$ – vyber 1 ze 3

$\binom{27}{4}$ – vyber 4 ze zbylých 27 (bezvadné)

$\binom{30}{5}$ → počet všech možných výběrů bez ohledu na to zda jsou 3, 2 nebo 1 vadný.

Př.2b: Jaká je pravděpodobnost, že mezi 5 náhodně vybranými výrobky z příkladu 1 bude nejvýše 1 vadný?

žádný vadný ↘ ; + ; ← jeden vadný

$$P = \frac{\binom{27}{5}+\binom{3}{1}\cdot\binom{27}{4}}{\binom{30}{5}} = 0{,}936$$

$\binom{30}{5}$ – celkový počet řešení

Př.3a: Jaká je pravděpodobnost výhry 1.pořadí ve sportce. $P = \frac{\binom{1}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 7{,}1511\cdot 10^{-8}$

jeden výherní sloupec

$\binom{49}{6}$ → počet výběrů

Př.3b: Jaká je pravděpodobnost výhry 5.pořadí ve sportce. $P = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0{,}01765$

10 000 000

Př. 4: V posledních letech každoročně onemocní cca 600 lidí klíšťovou encefalitidou. Jaká je pravděpodobnost, že občan ČR během roku onemocní touto chorobou. $P = 600/10^7 = 6.10^{-5}$. Tedy určitě vyšší než, že vyhrajeme 1. pořadí ve sportce.

Př.5: Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost jevu A - padne součet 7 a jevu B - padne součet 11. Počet všech možných výsledků je 36, příznivých jevu A je 6: $\underbrace{1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3}_{6 \text{ ze } 36}$, příznivých jevu B 2: 5-6, 6-5. P(A)=6/36=1/6. P(B)=2/36=1/18.

Př.6a: Jaká je pravděpodobnost, že při 6 hodech kostkou nepadne 6 ani jednou? $P = 5^6/6^6 = 0{,}334898$.

Př.6b: Kolikrát musíme hodit kostkou, aby tato pravděpodobnost byla menší než 0,1?
$(5/6)^n < 0{,}1$ n*log(5/6)<log(0,1) n>-1/log(5/6) n>12,63 Musíme hodit alespoň 13 krát.

Pravděpodobnost doplňku, sjednocení a průniku jevů

$0 \leq P(X) \leq 1$, $P(\emptyset)=0$ nemožný jev, $P(\Omega)=1$ jistý jev.

$P(X')=1 - P(X)$ pravděpodobnost jevu X', který je doplňkem k jevu X
Pravděpodobnost, že při hodu kostkou nepadne 6 je 1 - 1/6 = 5/6.

– pravděpodobnost že padne jednotlivé číslo: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

sjednocení $A \vee B$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ v případě, že se jevy A,B navzájem vylučují tj. $A \cap B = \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ v obecném případě

$P(A \cap B) = P(A)*P(B)$ **jen v případě, že jevy A,B jsou nezávislé**, tj. uskutečnění jednoho jevu nemá vliv na uskutečnění druhého jevu

průnik $A \wedge B$

$P(A \cap B) = P(A)*P(B|A) = P(B)*P(A|B)$ v obecném případě [P(A|B) je pravděpodobnost jevu A za podmínky B a P(B|A) je pravděpodobnost jevu B za podmínky A – podrobnosti později.

Př.7a: Pořadatelé plesu organizují 2 tomboly. V každé z nich bylo vydáno 100 losů z nichž právě 20 vyhrává. Zakoupil jsem jeden los z první tomboly a jeden los z druhé tomboly. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraji na oba losy?Nezávislé tomboly a tedy i pravděpodobnosti: P = 20/100*20/100 = 1/5*1/5 = 1/25 = 0,04.

7b: Pořadatelé plesu organizují tombolu. V tombole bylo vydáno 100 losů z nichž právě 20 vyhrává. Zakoupil jsem . losy. Jaká je pravděpodobnost, že na oba vyhraji? P = 20/100*19/99 = 1/5*19/99 = 0,0303.