

# 20 Kombinatorika

- Zabývá se vyhledáváním nadvážených různých skupin 12 daných prvků a určováním počtu takových skupin. Zabývá se vlastnostmi konečných množin.

- Pravidlo součinu: počet uspořádaných  $k$ -lic, ve kterých první člen lze vybrat  $m_1$  způsoby; i druhý člen  $m_2$  způsoby atd. ve  $k$ -tý člen po vybrání předchozích  $m_k$  způsoby, je roven  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$

Př.: určete počet čtyřciferných čísel, dělitelných pěti, kde se číslice objevují jen jednou.

na konci je 0 ... 

9	8	7	1
---	---	---	---

 $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$

na konci je 5 ... 

8	8	7	1
---	---	---	---

 $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 448$

---

  
952

- Pravidlo součtu: množiny  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mají po řadě  $p_1, p_2, \dots, p_n$  prvků a žádné dvě z těchto množin jsou disjunktní; počet prvků množiny  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  je roven  $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

- Faktoriál: Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

Př.:  $\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)!}{(n+2)!} = n^2 + 7n + 12 \quad n \in \mathbb{N}$   
 $0! = 1$

- Skupiny bez opakování: každý prvek se může objevit nejvýše jednou

• Variace - uspořádaná  $k$ -lice sestavená tak, že

$$V(k; n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad k \leq n$$

→ měří na počty

Příklady skupin: vybrání členů družstva, kde má každý člen svou funkci

• Permutace - uspořádaná  $m$ -lice

$$P(m) = V(m; m) = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1 = m! \quad \rightarrow \text{rozložení na prvočísla}$$

Příklad: Jakou rychlost lze usadit  $m$ -dětí na lavičku?

• Kombinace - neuspořádaná  $k$ -lice sestavená  $m$  předměty  
předmět vyhledává nejrychleji jedinou. Zde nesáhl  
na pořadí.

$$V(k; m) = k! \cdot K(k; m)$$

$$K(k; m) = \frac{1}{k!} \cdot V(k; m) = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \quad k \leq m$$

$$\frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} = \binom{m}{k} \dots \text{kombinační číslo}$$

Př.: Vyberte skupinu tří dětí z lyžařského kurzu o 20-ti dětech.

- Skupiny s opakováním

• Variace s opakováním

$$V'(k; m) = m^k$$

Př.: Jaké maximálně pětičíslické přirozené čísel lze sestavit z cifer 0...9, když se cifry mohou opakovat?

• Permutace s opakováním

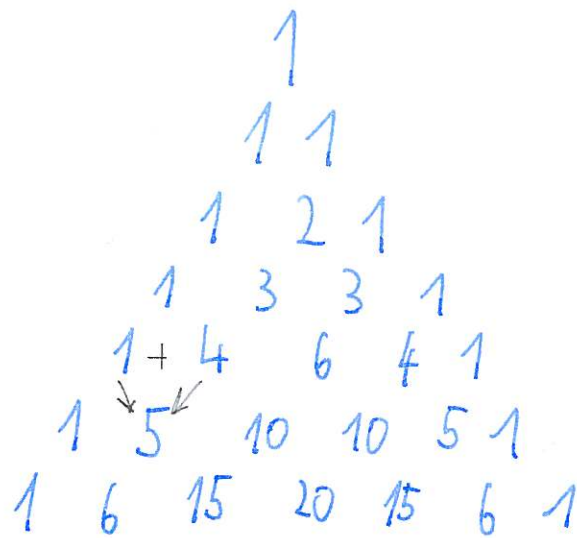
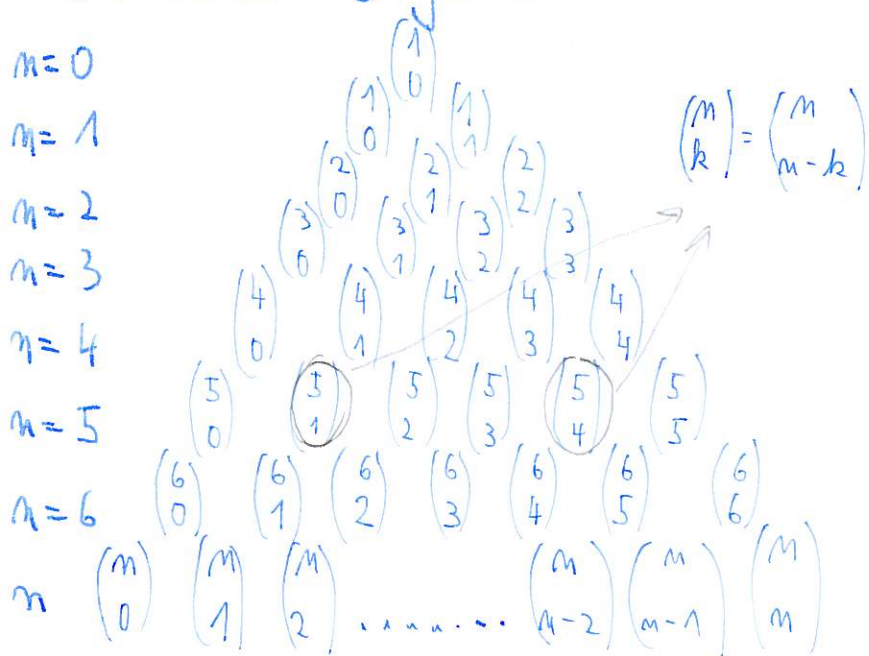
$$P'(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

$\leftarrow$  je  $m$  prvků, kde se první prvek vyskytl  $k_1$ -krát, 2. prvek  $k_2$ -krát...  
 $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = k$

Př.: Jaké desetičíslické čísel lze sestavit ze čtyř čísel 1, tří čísel 2, dvou čísel 3 a jednoho čísla 4?  
 $k=10 \quad k_1=4, k_2=3, k_3=2, k_4=1$



# - Pascalův trojúhelník



# - Binomická řada $n \dots$ přirovnání čísel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Př.: 5. člen binomického řady  $(1 - \frac{p}{2})^7$  obsahuj  $p^4$

$n=7$   
 $a=1$   
 $b = -\frac{p}{2}$

$k$ -ty člen má tvar:

$$\binom{7}{k-1} 1^{7-(k-1)} \left(-\frac{p}{2}\right)^{k-1} = \binom{7}{k-1} \frac{(-p)^{k-1}}{2^{k-1}}$$

hledáme člen obsahující  $p^4 \dots$

$$p^4 = (-p)^{k-1}$$

$k=5$

5. člen binomického řady  $(1 - \frac{p}{2})^7$  obsahuj  $p^4$

• Kombinace s opakováním - neuspořádaná  $k$ -tice sestavená z

léčků  $m$  प्रकारů, z nichž se v ní vyskytl nejvýše  $k$ -krát.

$$K'(k; m) = k(k; m+k-1) = \binom{m+k-1}{k} = \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!}$$

Př.: V cukrovně mají devět druhů cukrů v dostatečném množství.  
 Jakou způsobou si můžeme koupit šest cukrů?

$$K'(6, 9)$$

- Vlastnosti kombinačních čísel:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \quad k \leq m \wedge k, m \in \mathbb{N}$$

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1 \quad \binom{m}{1} = m \quad \binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$