20 Kombinatorika

- Zabývá se vytvářením navzájem různých skupin z daných prvků a určováním počtu takových skupin. Zabývá se vlastnostmi konečných množin.

- **Pravidlo součinu:** počet uspořádaných k-tic, ve kterých první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru předchozích n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

  Př.: Určete počet čtyřciferných čísel, dělitelných pěti, kde se číslice objevují jen jednou.

  na konci je 0 … $\boxed{9 \mid 8 \mid 7 \mid 1}$ $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$

  na konci je 5 … $\boxed{8 \mid 8 \mid 7 \mid 1}$ $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 448$

  952

- **Pravidlo součtu:** množiny $A_1, A_2 \dots A_n$ mají po řadě $p_1, p_2 \dots p_n$ prvků a každé dvě z těchto množin jsou disjunktní, počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 \dots p_n$

- **Faktoriál:** Pro každé $n \in N$ je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$
  $0! = 1$

  Př.: $\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = \frac{(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)!}{(n+2)!} = n^2 + 7n + 12 \quad n \in N$

- Skupiny bez opakování: každý prvek se zde vyskytuje nejvýše jednou

- **Variace** - uspořádané k-tice sestavené tak, že ↑

$$V(k;n) = n(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad k \le n$$

→ záleží na pořadí

Příklady typu: vyberte tříčlenné družstvo, kde má každý člen svou funkci

• **Permutace** – uspořádaná n-tice

$$P(n) = V(n;n) = n\cdot(n-1)\ldots 1 = n! \longrightarrow$$ záleží na pořadí

Příklad: Kolika způsoby lze usadit n-dětí na lavičku?

• **Kombinace** – neuspořádaná k-tice sestavená tak, že se každý prvek vyskytuje nejvýše jednou. Zde nezáleží na pořadí.

$$V(k;n) = k!\cdot K(k;n)$$

$$K(k;n) = \frac{1}{k!}\cdot V(k;n) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad k \leq n$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \ldots \text{kombinační číslo}$$

Př.: Vyberte skupinu tří dětí z lyžařského kurzu o 20-ti dětech.

-Skupiny s opakováním

• **Variace s opakováním**

$$V'(k;n) = n^k$$

Př.: Kolik maximálně pěticiferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0... a když se cifry mohou opakovat?

• **Permutace s opakováním**

$$P'(k_1;k_2\ldots k_n) = \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$$

z n prvků, kde se první prvek vyskytuje k_1-krát, 2. prvek k_2-krát... $k_1+k_2+k_3\ldots+k_n=k$

Př.: Kolik desetiiferných čísel lze sestavit ze čtyř číslic 1, tří číslic 2, dvou číslic 3 a jedné číslice 4?

$k=10 \quad k_1=4, k_2=3, k_3=2, k_4=1$

- Pascalův trojúhelník

$n=0$ $\quad \binom{0}{0}$

$n=1$ $\quad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$

$n=2$ $\quad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$

$n=3$ $\quad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

$n=4$ $\quad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

$n=5$ $\quad \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$

$n=6$ $\quad \binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$

n $\quad \binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 + 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

- Binomická věta

$n \ldots$ přirozené číslo

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Př.: Který člen binomického rozvoje $\left(1-\frac{p}{2}\right)^7$ obsahuje p^4

$n=7$

$a=1$

$b=-\frac{p}{2}$

k-tý člen má tvar:

$$\binom{7}{k-1}1^{7-(k-1)}\left(-\frac{p}{2}\right)^{k-1} = \binom{7}{k-1}\frac{(-p)^{k-1}}{2^{k-1}}$$

Hledáme člen obsahující $p^4 \ldots$

$$p^4 = (-p)^{k-1} \qquad k=5$$

5. člen binomického rozvoje $\left(1-\frac{p}{2}\right)^7$ obsahuje p^4

- **Kombinace s opakováním** – neuspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.

$$K'(k;n) = K(k;n+k-1) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

Př.: V cukrárně mají devět druhů zákusků v dostatečném množství. Kolika způsoby si můžeme koupit šest zákusků?

$$K'(6,9)$$

- Vlastnosti kombinačních čísel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad k \leq n \wedge k;n \in N$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$