25 Matematické důkazy

• Přímý důkaz: $A \Rightarrow B$ A ... víme, že pravdivý B ... chceme dokázat

Př.: Součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi:

$$x + x + 1 + x + 2 = (3x + 3) = 3(x+1)$$

• Nepřímý důkaz: $A \Rightarrow B$ dokazuji se místo implikace obměna $B' \Rightarrow A'$, která má stejnou pravdivostní hodnotu jako původní implikace.

Př.: $\forall n \in N;\ 2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$ $A \Rightarrow B$

$2 \mid n^2$ … A $2 \mid n$ … B

$$2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2 \qquad B' \Rightarrow A'$$

$n = 2k - 1$ Když je n liché, pak

$n^2 = (2k-1)^2$

$n^2 = 4k^2 - 4k + 1$

$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ → je i n^2 liché.

• Důkaz sporem: Dokázáním nepravdivosti negace dokážeme pravdivost původního výroku.

Př.: $\sqrt{2}$ je iracionální číslo (A)

$\sqrt{2}$ je racionální číslo (A')

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad p \in Z,\ q \in N$$

$q\sqrt{2} = p \quad /^2$

$2q^2 = p^2$ → p^2 je sudé číslo → p je sudé $p = 2k$ $k \in Z$

$q^2 2 = (2k)^2$

$q^2 = 2k^2$ → q^2 je sudé číslo → q je sudé $q = 2l$ $l \in Z$

$4l^2 = 2k^2$

Toto je ve sporu s tím, že p a q jsou nesoudělná

• **Důkaz indukcí:** $\forall n \in N: V(n)$

1) dokážeme platnost $V(1)$ (pro jedničku)
2) indukční krok $V(k) \Rightarrow V(k+1)$

Př.. $\forall n \in N: 2 \mid (n^2+n+1)$

$V(1) \ldots 2 \mid 3$ .. neplatí

$V(k) \ldots 2 \mid (k^2+k+1)$

$V(k+1) \ldots 2 \mid [(k+1)^2+k+1+1] = k^2+2k+1+k+2 = k^2+3k+3$

$k^2+k+1 + 2k+2$

vždy číslo by to nebylo

Př.: $\forall n \in N: 6 \mid (n^3+5n)$

$V(1) \ldots 6 \mid 6$

$V(k) \ldots 6 \mid (k^3+5k)$

$V(k+1) \ldots 6 \mid [(k+1)^3+5(k+1)]$ … chceme dokázat

$$[(k+1)^3+5(k+1)] = k^3+5k+3k(k+1)+6$$

To jsme už dokázali jiný $6 \mid k^3+5k$

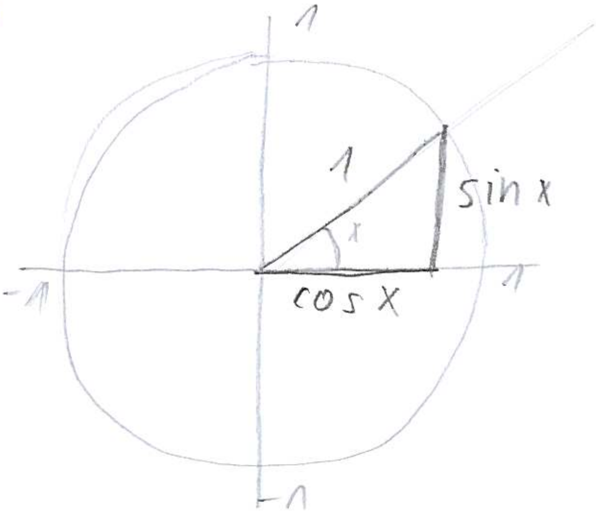
dělitelé kvůli trojce a $k \cdot (k+1)$ jsou po sobě jdoucí čísla → ~~oba~~ jedno je sudé

$6 \mid 6$

- $\sqrt{2} \in \overline{Q}$

viz předchozí list

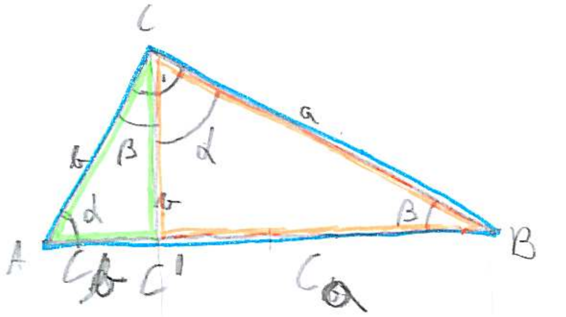
- $\sin^2 x + \cos^x x = 1$



$c^2 = a^2 + b^2$

$1 = \sin^2 x + \cos^x x$

- Euklidovy věty



$\boxed{v^2 = c_a \cdot c_b}$ $\boxed{a^2 = c \cdot c_a}$ $\boxed{b^2 = c \cdot c_b}$

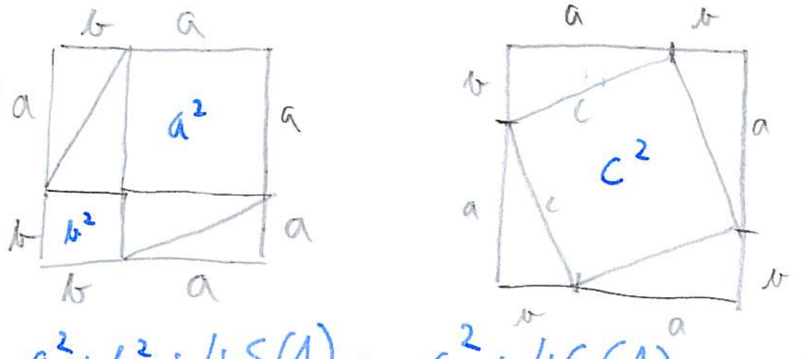
$\frac{v}{c_b} = \frac{c_a}{v} \quad / \cdot v c_a$ $\frac{a}{c} = \frac{c_a}{a}$ $\frac{b}{c_b} = \frac{c}{b}$

- Pythagorova věta

I.
$a^2 = c \cdot c_a$
$b^2 = b \cdot c_b$

$a^2 + b^2 = c \cdot c_a + b \cdot c_b$
$a^2 + b^2 = c \cdot (c_a + c_b)$
$a^2 + b^2 = c^2$

II.

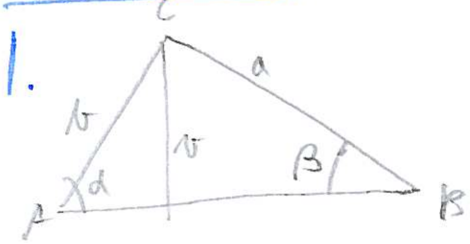


$a^2 + b^2 + 4S(\Delta) = c^2 + 4S(\Delta) \quad / -4S(\Delta)$

$a^2 + b^2 = c^2$

Sinová věta

I.



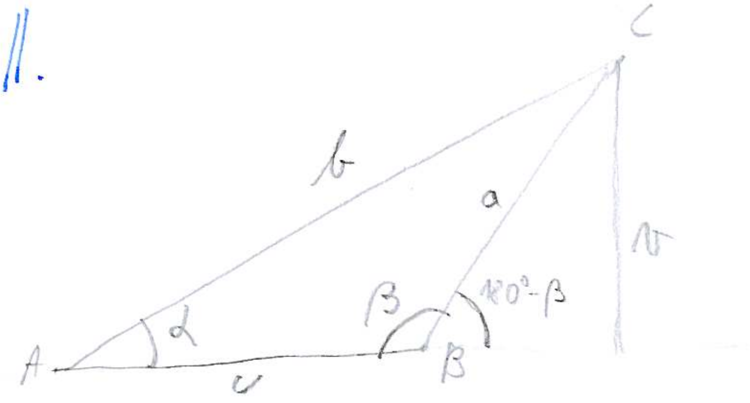
$\sin\alpha = \frac{v}{b}$ $\quad v = \sin\alpha \cdot b$

$\sin\beta = \frac{v}{a}$ $\quad v = \sin\beta \cdot a$

$\sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a$

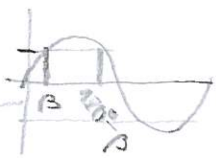
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

II.



$v = a \cdot \sin(180° - \beta)$

$v = a \cdot \sin\beta$

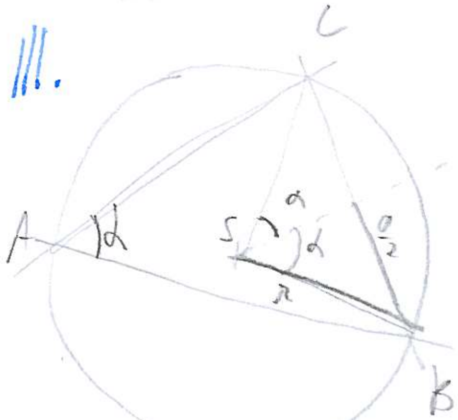


$v = b \cdot \sin\alpha$ (analogicky)

$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

III.

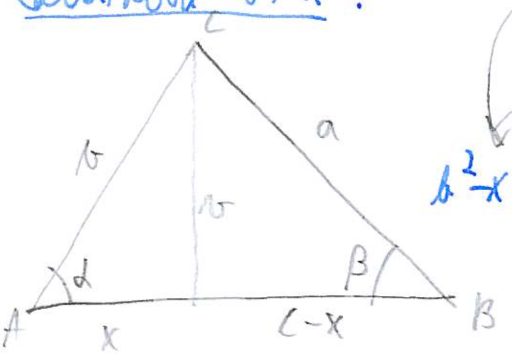


$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{2r}$

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{1}{2r}$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2r}$$

Kosinová věta :



$$v^2 = b^2 - x^2$$

$$v^2 = a^2 - (c-x)^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$-a^2 = -c^2 - b^2 + 2c\cdot b\cdot\cos\alpha$$

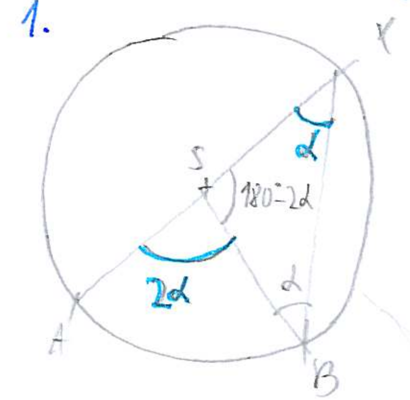
$$\underline{a^2 = c^2 + b^2 - 2c\cdot b\cdot\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{b}$$

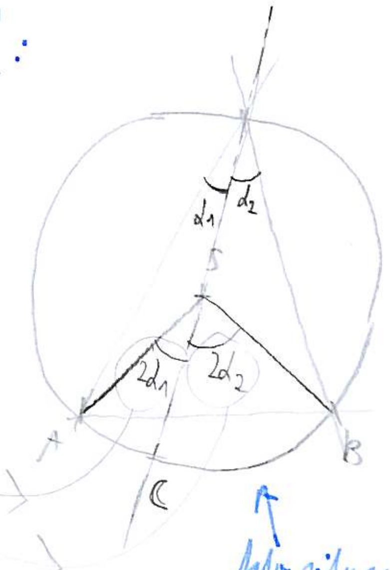
$$x = b\cdot\cos\alpha$$

Středový a obvodový úhel :

1.



2.



Tato situace jsou dvě situace 1.

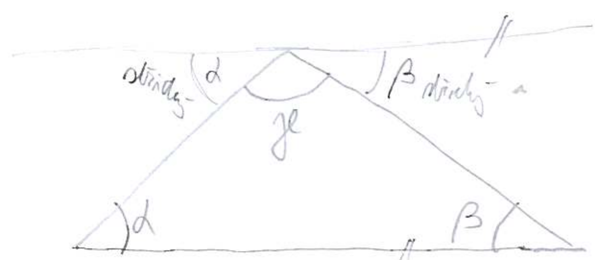
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\beta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$$

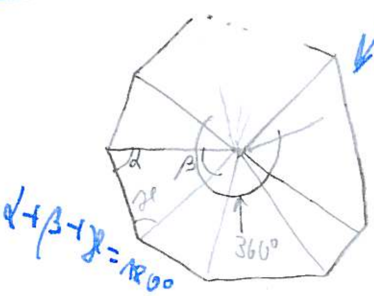
$$\beta = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\underline{\beta = 2\alpha}$$

Součet úhlů 3-úhelníku je 180°:



N-úhelníku:



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

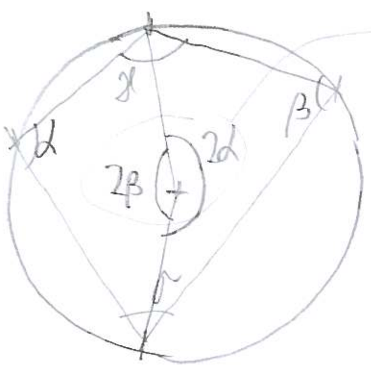
Těchto trojúhelníků je tam n

„obvodo středu"

$$n\cdot 180° - 360° =$$

$$= 180°(n-2)$$

Tětivový 4-úhelník:



$$2\beta + 2\alpha = 360°$$

$$\underline{\alpha + \beta = 180°}$$

Věty o logaritmech: 1) $\log_a r\cdot s = \log_a r + \log_a s$

$r = a^{\log_a r}$

$s = a^{\log_a s}$

Pomocí užití definice logaritmu

$n = a^{\log_a n}$ $n = r\cdot s$

$r\cdot s = a^{\log_a r\cdot s}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^{\log_a r\cdot s} = a^{\log_a r + \log_a s}$

$\underline{\log_a r\cdot s = \log_a r + \log_a s}$

2) $\log_a r : s = \log_a r - \log_a s$

analogicky k 1)

3) $\log_a r^s = s\cdot \log_a r$ $\quad \forall s \in R;\ r \in R^+;\ a \in (0;1)\cup(1;+\infty)$

$r = a^{\log_a r}$

$r^s = a^{\log_a (r^s)}$ $\cancel{\left(a^{\log_a r}\right)^s = a^{s\cdot\log_a r}}$ $r^s = \left(a^{\log_a r}\right)^s$

$a^{\log_a (r^s)} = \left(a^{\log_a r}\right)^s$

$a^{\log_a (r^s)} = a^{s\cdot \log_a r}$

$\underline{\log_a (r^s) = s\cdot \log_a r}$

4) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

$x = a^{\log_a x}$ $/\log_b$

$\log_b x = \log_b a^{\log_a x}$

$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$

$$\underline{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Kvadratická rovnice:

$$ax^2+bx+c=0 \quad /:a$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \quad /+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad /\sqrt{}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad /-\frac{b}{2a}$$

$$\underline{\underline{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}$$